133 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

(E,(.,.)) un espace euclidien, ||.|| la norme associée au produit scalaire.

I) Adjoint et endomorphismes remarquables [Gou] + [Szp]

1) L'adjoint [Gou] + [Szp]

Prop : il existe exactement un endomorphisme vérifiant… On l'appelle l'adjoint (remarque : l'adjoint n'existe pas tj mais en DF si) [Gou]

Prop : involutif, linéaire [Gou]

Lien avec les matrices : M la matrice de f dans une base B. Alors g est l'adjoint de f ssi Mat_B(g)=tM (vrai seulement si B est orthonormée [Gou]

Quelques proprietés [Szp]

2) Endomorphismes remarquables [Gou] + [Szp]

Déf : autoadjoint (ou symétrique)

Déf : antisymétrique.

Déf : endomph orthogonal : ||u(x)||=||x|| (isométrie).

Interprétation matricielle. On fixe une base orthonormée et…

Déf : E un espace euclidien (ou hermitien). On dit que u est normal si u commute avec son adjoint.

Ex : symétriques, antisymétriques.

II) Réduction de ces endomorphismes [Gou]

1) Réduction des endomorphismes normaux [Gou]

Lemme 1 : F un sev u-stable de E. Alors l'orthogonal de f est stable par u*.

Lemme 2 : u normal. si E_l est un sous espace propre de u, alors son orthogonal est stable par u *(se sert du lemme 1)*

Théorème : réduction des matrices normales réelles.

Prop : Ker(u*)=orth(Im u), im(u*)⊂ orth(Ker u)

2) Application à la réduction d'autres endomorphismes [Gou]

Symétriques, antisymétriques, orthogonaux (tableau)

III) Endomorphismes orthogonaux [Ale] + [Szp] + [MT] + [FGN Alg3]

1) Structure algébrique [Szp]

Déf : SOn

Prop : On est psd de SOn avec Z/2Z, le produit est direct quand n est impair.

2) Structure topologique [Ale]

Prop : On et SOn sont compacts

Prop : SOn et connexe par arcs

Prop : on a deux CC

Th : sous groupes compacts de GLn [Ale]

IV) Endomph symétriques et antisymétriques [MT] + [Gou] + [RW]

1) Généralités [RW]

Def : symétrique positif, défini positif

Prop : Sn(R) est un evde dim n(n+1)/2. An(R) est un ev de dim n(n-1)/2.

Prop : Mn(R)=An(R)+Sn(R).

Prop : symétrique positif ssi valeurs propres positives etc.

Prop : existence d'une racine carrée *(corollaire de la réduction + vp positives)*

2) Diagonalisation simultanée [Gou]

Th : diagonalisation simultanée : si on a une fq et un produit scalaire, on peut trouver une base orthogonale pour la fq est orthonormée pour le produit scalaire.

Appl : classification des coniques.

3) Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales [RW]

Déf : projecteur (pop=p), symétrie (s^2=Id).

Une symétrie est orthogonale ssi elle est symétrique

Tout endomph orthogonal s'écrit comme produit de symétries orthogonales hyperplanes.

4) Décomposition polaire [MT] + [FGN Alg3]

Sn est homéo à Sn++

Décomposition polaire [MT]

Interprétation en terme de distance [FGN Alg 3]

Développements :
Réduction des endomorphismes normaux [Gou Alg 258] (**)
Décomposition polaire [MT 18] + [FGN Alg3 177] (**)

Bibliographie :
[Gou]
[Szp]
[RW] Ramis & Warusfel - Maths L2

[MT]
[Ale]
[FGN Alg3]

<u>Rapport du jury (2004 à 2009)</u> : il faut savoir caractériser correctement les symétries orthogonales et les projections orthogonales en utilisant l'adjoint. Si on présente en développement la réduction des endomorphismes normaux, il convient d'avoir réfléchi à l'unicité de la forme réduite proposée et d'en déduire la réduction des endomorphismes autoadjoints et orthogonaux.